

## 2. ECUAȚIILE DE FUNCȚIONARE

1. *Ipoteza de calcul*
2. *Ecuatiile în complex*
3. *Ecuatiile cu mărimi raportate*
4. *Scheme echivalente*
5. *Diagrama fazorială*

### 1. Ipoteza de calcul

Se presupune că mașina asincronă este alimentată cu un sistem simetric sinusoidal de tensiuni, că este nesaturată și că toate înfășurările sunt repartizate sinusoidal și simetric pe pasul polar. În acest caz ideal și curenții înfășurărilor statorice și rotorice formează sisteme sinusoidale simetrice și câmpul învârtitor rezultat din întrefier devine circular.

Considerarea doar a armonicilor fundamentale de timp și spațiu, este justificată de faptul că acestea condiționează direct procesele de bază din mașină, armonicile superioare de timp din curbele tensiunilor și curenților și de spațiu din curbele solenațiilor înfășurărilor, condiționează procese secundare din mașină și efectul lor poate fi analizat separat.

Fie mașina asincronă trifazată cu axele fazelor ca în figura 2.1. Înfășurarea statorică prezintă rezistența  $R_1$  și inductivitățile în câmpul rezultat  $L_{1\sigma}$ ,  $L_{1h}$ ,  $L_1$ . (inductivitatea de dispersie, inductivitatea ciclică utilă și cea totală). Analog, parametrii unei înfășurări de fază rotorice sunt rezistența  $R_2$  și inductivitățile  $L_{2\sigma}$ ,  $L_{2h}$ ,  $L_2$ .

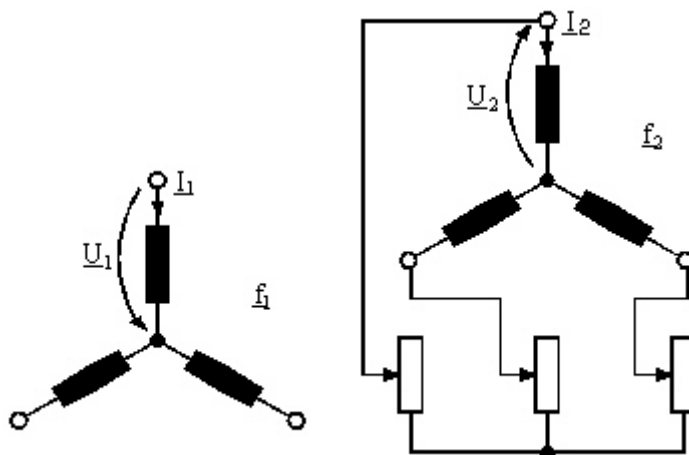


Fig.2.1. Reprezentarea schematică a mașinii asincrone.

### 2. Ecuatiile în complex

La asocierea sensurilor pozitive corespunzătoare receptorului pentru înfășurările statorice și sursei pentru înfășurările statorice și sursei pentru înfășurările rotorice, se obțin ecuațiile în complex:

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= -\underline{U}_{e1} + \underline{Z}_1 \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 &= -\underline{U}_{e2s} + \underline{Z}_{2s} \underline{I}_2\end{aligned}\quad (2)$$

notațiile utilizate având semnificațiile cunoscute.

$\underline{U}_{e1}$  - t.e.m. indusă pe o fază a statorului de câmpul util;

$\underline{U}_{e2s}$  - t.e.m. indusă pe o fază a rotorului aflat în mișcare.

$X_1 = \omega_1 L_{1\sigma}$ ,  $\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1$

$X_{2s1} = \omega_2 L_{2\sigma} = sX_2$ ,  $\underline{Z}_{2s} = R_2 + jX_{2s}$  (2)

$Z_1$  - impedanța de dispersie pe o fază a statorului;

$Z_2$  - impedanța de dispersie pe fază a rotorului în mișcare.

Ecuția solenațiilor în complex pentru înfășurările polifazate simetrice, când se consideră doar amplitudinea armonicii fundamentale, va fi:

$$m_1 N_1 K_{B1} \underline{I}_1 + m_2 N_2 K_{B2} \underline{I}_2 = m_1 N_1 K_{B1} \underline{I}_{01} \quad (3).$$

Pentru t.e.m. induse de câmpul principal în înfășurări avem:

$$\begin{aligned}\underline{U}_{e1} &= -j\omega_1 \underline{\Psi}_{1h} = -j\omega_1 N_1 K_{B1} \underline{\Phi}_h \\ \underline{U}_{e2s} &= -j\omega_2 \underline{\Psi}_{2h} = -js\omega_1 N_2 K_{B2} \underline{\Phi}_h\end{aligned}\quad (4)$$

Pe baza celor prezentate ecuațiile mașinii asincrone devin:

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= -\underline{U}_{e1} + \underline{Z}_1 \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 &= -\underline{U}_{e2s} + \underline{Z}_{2s} \underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 + \frac{m_2 N_2 K_{B2}}{m_1 N_1 K_{B1}} \underline{I}_2 &= \underline{I}_{01} \\ \underline{U}_{e1} &= -\underline{Z}_{1m} \underline{I}_{01}\end{aligned}\quad (5)$$

În sistemul (5) ecuațiile în care intervine indicele s corespund frecvenței rotorice  $f_2 = sf_1$ . Presupunând rezistența reostatului inclusă în rezistența înfășurării rotorice, se poate considera în ecuații  $U_2 = 0$ . Reținem că în acest caz prin  $R_2$  trebuie înțeleasă rezistența de fază a înfășurării rotorice, plus rezistența pe fază a reostatului, și rotorul poate fi reprezentat prin circuitul din fig.2.2. Pentru a avea aceeași frecvență în stator și rotor, se înlocuiește rotorul mașinii reale printr-un rotor imobil fața de stator, dar care conservă regimul de funcționare al mașinii. Din punct de vedere matematic, operația de raportare este echivalentă cu împărțirea prin s în ecuația de tensiuni a rotorului

$$\underline{U}_{e2} - \underline{Z}_2 \underline{I}_2 = 0 \quad (6)$$

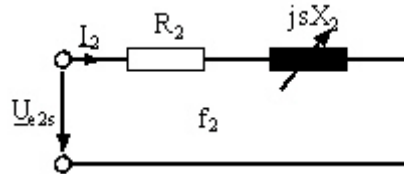
unde:

$$\underline{Z}_2 = \frac{R_2}{s} + jX_2 \quad (7)$$

reprezintă impedanța pe fază a rotorului imobil, iar

$$\underline{U}_{e2} = -j\omega_1 N_2 K_{B2} \Phi_h \quad (8)$$

este t.e.m. indusă pe o fază a rotorului imobil.



**Fig.2.2. Schema echivalentă a unei faze rotorice pentru mașina reală**

Se pune condiția ca puterea mecanică corespunzătoare rotorului real, să se regăsească la rotorul imobil, sub forma unor pierderi pe rezistență fictivă dependentă de alunecare,

$$P_{mec} + m_2 R_2 I_2^2 = m_2 \frac{R_2}{s} I_2^2 = m_2 R_2 I_2^2 + m_2 R_2 \frac{1-s}{s} I_2^2 \quad (9)$$

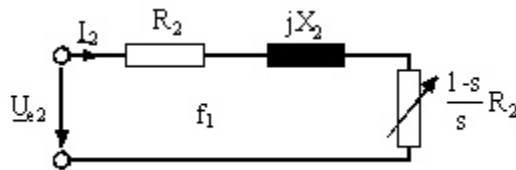
Rezultă, pentru rezistența fictivă de sarcină, valoarea:

$$R_s = m_2 R_2 \frac{1-s}{s} \quad (10)$$

Pentru rezistența variabilă a rotorului se poate folosi relația:

$$\frac{R_2}{s} = R_2 + R_2 \left( \frac{1-s}{s} \right) \quad (11).$$

Cu aceste transformări se obține schema echivalentă a circuitului rotoric imobil (fig.2.3.)



**Fig.2.2. Schema echivalentă a unei faze rotorice pentru mașina reală**

### 3. Ecuațiile cu mărimi raportate

Prin operația de raportare se înțelege înlocuirea rotorului real cu unul echivalent care are același număr de faze, același număr de spire și factor de bobinaj ca statorul și conservă în întregime regimul de funcționare al mașinii. Mărimile rotorului raportat se notează cu indice prim și, pentru a obține ecuațiile mașinii asincrone în acest caz, se au în vedere condițiile impuse ( $m_2' = m_1$ ,  $N_2' = N_1$ ,  $K_{B2}' = K_{B1}$ ) și cele de conservare.

1. Conservarea t.e.m. induse pe o fază a rotorului real și a celui raportat.

Conservarea t.e.m. induse pe o fază a rotorului real și a celui raportat:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{e2} &= -j\omega_1 N_2 K_{B2} \underline{\Phi}_h \\ \underline{U}'_{e2} &= -j\omega_1 N'_2 K'_{B2} \underline{\Phi}_h \end{aligned} \quad (12)$$

Se definește raportul de transformare al tensiunilor,

$$K_U = \frac{N_1 K_{B1}}{N_2 K_{B2}} \quad (13)$$

Având în vedere t.e.m. indusă pe o fază statorică, se obține:

$$\underline{U}'_{e2} = K_U \underline{U}_{e2} = \underline{U}_{e1} \quad (14)$$

## 2. Condiția de conservare a solenațiilor rotorului real și a celui raportat

Condiția de conservare a solenațiilor rotorului real și a celui raportat:

$$m_2 N_2 K_{B2} I_2 = m'_2 N'_2 K'_{B2} I'_2 \quad (15)$$

Se definește raportul de transformare al curenților:

$$K_1 = \frac{m_1 N_1 K_{B1}}{m_2 N_2 K_{B2}} \quad (16)$$

În aceste condiții, pentru curentul raportat, respectiv ecuația solenațiilor, se obțin expresiile:

$$\underline{I}'_2 = \frac{1}{K_1} \underline{I}_2, \quad \underline{I}_1 + \underline{I}'_2 = \underline{I}_{01} \quad (17)$$

## 3. Conservarea pierderilor din înfășurarea rotorului real și a celui raportat

Conservarea pierderilor din înfășurarea rotorului real și a celui raportat:

$$m_2 R_2 I_2^2 = m'_2 R'_2 I'^2_2 \quad (18)$$

Prin prelucrare se obține valoarea rezistenței rotorului raportat:

$$R'_2 = K_U K_1 R_2 \quad (19)$$

## 4. Condiția de conservare a defazajului dintre t.e.m. indusă și curentul corespunzător celor două rotoare

Condiția de conservare a defazajului dintre t.e.m. indusă și curentul corespunzător celor două rotoare:

$$\text{arcctg} \frac{X_2}{R_2} = \text{arcctg} \frac{X'_2}{R'_2} \quad (20)$$

de unde rezultă valoarea raportată a reactanței rotorului:

$$X'_2 = K_U K_1 X_2 \quad (21)$$

În urma unor prelucrări simple, se obțin ecuațiile mașinii asincrone cu rotorul raportat la stator sub forma:

$$\begin{aligned}
\underline{U}_1 &= -\underline{U}_{e1} + \underline{Z}_1 \underline{I}_1 \\
\underline{U}_{e2}' - \underline{Z}_2' \underline{I}_2' &= 0 \\
\underline{I}_1 + \underline{I}_2' &= \underline{I}_{01} \\
\underline{U}_{e1} = \underline{U}_{e2}' &= -\underline{Z}_{1m} \underline{I}_{01}
\end{aligned} \quad (22)$$

În ecuațiile anterioare au fost considerate și pierderile în fier, pentru tensiunea electromotoare  $\underline{U}_{e1}$ ,

$$\underline{Z}_{1m} = R_{1m} + jX_{1m}, \quad R_{1m} = K'' \omega_1^2 L_{sh}, \quad X_{1m} = K' \omega_1 L_{sh} \quad (23)$$

#### 4. Scheme echivalente

În continuare se va construi un circuit electric care să poată înlocui în calcule mașina asincronă. Acest circuit poartă numele de schemă echivalentă.

În acest scop se caută o relație 4.1. între  $\underline{U}_1$  și  $\underline{I}_1$  în care să nu intervină decât parametrii mașinii.

Astfel, cu ajutorul ecuațiilor a doua și a patra a sistemului (22) se obține:

$$\underline{I}_2' = \frac{\underline{U}_{e1}}{\underline{Z}_2'} \quad (24)$$

În plus, conform relației a patra a aceluiași sistem:

$$\underline{I}_{01} = -\frac{\underline{U}_{e1}}{\underline{Z}_{1m}} \quad (25)$$

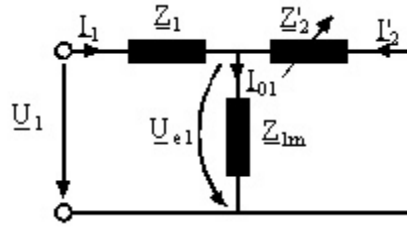
Înlocuind (24) și (25) în ecuația a treia se obține:

$$\underline{U}_{e1} = -\frac{\underline{I}_1}{\frac{1}{\underline{Z}_{1m}} + \frac{1}{\underline{Z}_2'}} \quad (26)$$

În acest fel, ținând cont de expresia anterioară, prima ecuație a sistemului (22) devine:

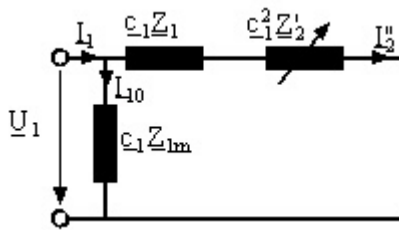
$$\underline{U}_1 = \left( \underline{Z}_1 + \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_{1m}} + \frac{1}{\underline{Z}_2'}} \right) \underline{I}_1 \quad (27)$$

Cu ajutorul acestei relații se poate acum desena schema echivalentă "T".



**Fig.2.4. Schema echivalentă în “T”**

Prelucrând în mod corespunzător ecuațiile de funcționare și notând cu  $\underline{c}_1 = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_{1m}}$ , se poate obține schema “T” (fig.2.5)

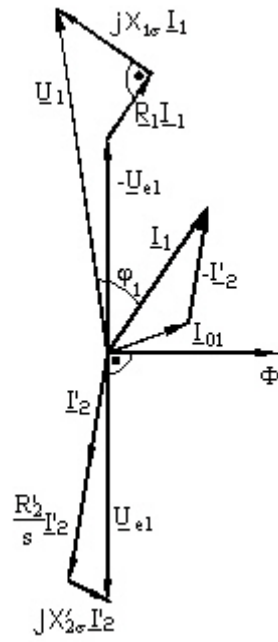


**Fig.2.4. Schema echivalentă în “T”**

În plus a fost utilizată notația  $\underline{Z}''_2 = -\frac{1}{\underline{c}_1} \underline{Z}'_2$ .

### 5. Diagrama fazorială

Reprezentarea în planul complex a ecuațiilor sistemului (22) are forma din figura următoare.



**Fig.2.6. Diagrama fazorială a mașinii asincrone**