

## Motor reluctant oscilant

**Tematica:** *Mașini electrice*

→ **Capitol:** *Conversia electromagnetă*

→ **Secțiunea:**

**Tip resursă:**  Expunere  Laborator virtual / Exercițiu  CVR

Acest laborator virtual propune cazul unui motor reluctant oscilant utilizat într-o mașină electrică de ras. Această ultimă aplicație ilustrează interesul conceptelor de energie (co-energie) pentru determinare cuplului dezvoltat, legea lui Laplace ( $F = BIl$ ), neaplicându-se la acest tip de motor.

- cunoștințe anterioare necesare:
- nivel: ciclul 2
- resurse ajutătoare:
- durata estimată:
- autori: [Damien Grenier](#), Grzegorz Galary
- realizare: Sophie Labrique
- traducere: [Sergiu Ivanov](#)

# Enunțul lucrării de laborator

În figura 1 se prezintă o vedere schematică, în secțiune, a unui motor reluctanț, utilizat pentru acționarea lamelor de tăiere ale unui aparat electric de ras. Cu bobina nealimentată, un resort menține armătura mobilă într-o poziție excentrică  $\theta = \theta_0$ , fixată de un limitator mecanic (nereprezentat în figură). Dacă prin bobină circulă un curent  $i$ , va apărea un cuplu electromagnetic, care va determina deplasarea armăturii mobile, ce va avea tendința să se alinieze cu cea fixă. Dacă acest curent este un curent alternativ, cu frecvența egală cu jumătate din frecvența proprie de oscilație a sistemului mecanic format din armătura mobilă și resort, se va obține o mișcare oscilatorie întreținută.

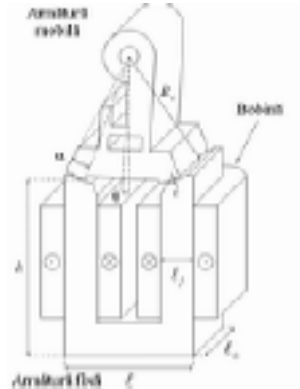


Figura 1



Figura 1b

Fiecare înfășurare a bobinei are  $n$  spire. Cele două înfășurări sunt conectate în serie.

- $R_m$  este raza medie a întrefierului:  $R_m = 28 \text{ mm}$
- $e$  este lățimea întrefierului:  $e = 0,1 \text{ mm}$
- $\alpha$  este deschiderea unghiulară a armăturilor magnetice, la nivelul întrefierului:  $\alpha = 9,2^\circ$
- $l$  este lățimea motorului:  $l = 28 \text{ mm}$
- $l_m$  este grosimea motorului:  $l_m = 12 \text{ mm}$
- $h$  este înălțimea medie a armăturii fixe, la nivelul întrefierului:  $h = 37,7 \text{ mm}$
- $l_f$  este lățimea medie a miezului de fier:  $l_f = 7 \text{ mm}$
- $\theta$  este poziția unghiulară a armăturii mobile față de poziția de aliniere cu armătura fixă

## 1. Calculul cuplului de origine electromagnetică, în ipoteza permeabilității infinite a fierului

Calculați cuplul electromagnetic în funcție de poziția  $\theta$  a rotorului ( $|\theta| < \alpha$ ) și de curentul  $i$  din bobine. Se va considera că secțiunea fiecărei bobine este de  $115 \text{ mm}^2$  și că densitatea medie de curent este  $j = 1 \text{ A/mm}^2$ . Se va presupune că permeabilitatea fierului este infinită, iar fluxul de dispersie negliabil.

Răspuns >>

## 2. Luarea în considerație a lungimii circuitului magnetic

Lungimea medie a miezului magnetic se poate estima ca fiind (figura 3)

$$L_f = 2(l - l_f) + 2h = 117,4 \text{ mm}$$

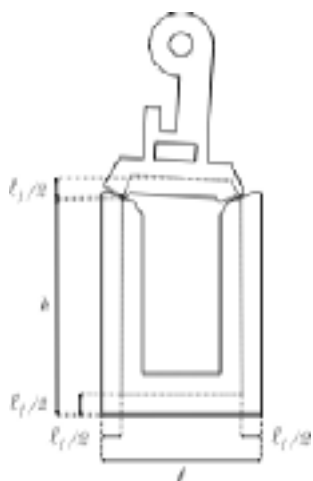


Figura 3: Lungimea medie a miezului magnetic

Dacă se va considera permeabilitatea relativă a fierului  $\mu_r = 2000$  (nu infinită), raportul dintre lungimea miezului și permeabilitatea relativă a fierului ( $l/l\mu_r = 0,059\text{mm}$ ) nu mai este neglijabil față de raportul dintre lățimea întrefierului și permeabilitatea relativă a aerului ( $2e/l = 0,2\text{mm}$ ). Pentru estimarea cuplului, trebuie să se țină cont de reluctanța miezului magnetic.

Reluați calculul cuplului electromagnetic, presupunând permeabilitatea relativă a fierului constantă (fără saturație) și egală cu  $\mu_r = 2000$ . În continuare, se va neglija fluxul de dispersie.

Răspuns >>

### 3. Efectul saturației

Materialul feromagnetic din care este construit miezul nu are o permeabilitate constantă. Curba de saturație este trasată în figura 6.

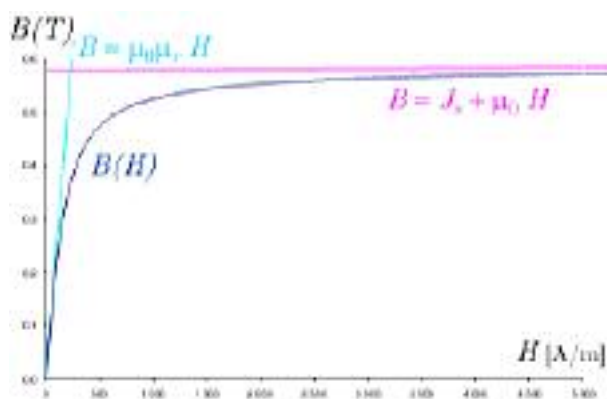


Figura 6: Curba de saturație a materialului feromagnetic

Curba de saturație a materialului feromagnetic

Presupunând că materialul se saturează omogen în întreg miezul, calculați pentru  $\theta = 0$ , valoarea câmpului  $H_f$ , deducând permeabilitatea relativă a materialului în acest punct de funcționare și calculați valoarea corespunzătoare a cuplului electromagnetic.

Răspuns >>

## 1. Ajutor

Cum s-a demonstrat în paragraful 2.5.2 al cărții, cuplul este egal cu variația, în funcție de poziție, a co-energiei magnetice înmagazinate, aceasta fiind exprimată în funcție de curentul  $i$ .

în plus ...

Cum s-a demonstrat în paragraful 2.5.2 al cărții, cuplul este egal cu variația, în funcție de poziție, a co-energiei magnetice înmagazinate, aceasta fiind exprimată în funcție de curentul  $i$ .

În cazul liniar, co-energia magnetică este egală cu energia magnetică

$$W_{mag} = W_{cmag} = \frac{1}{2} Li^2$$

unde  $L$  este inductanța proprie a bobinei.

în plus ...

Permeabilitatea fierului fiind infinită, iar fluxul de dispersie neglijabil, inductanța proprie a bobinei  $L$ , este egală cu de  $\mu_0$  ori fluxul  $\Phi$  prin întrefier, împărțit la curentul care străbate bobina

$$L = \frac{\mu_0 \Phi}{i}$$

în plus ...

Dacă permeabilitatea fierului este infinită

- intensitatea câmpului  $H$  în întrefier este nulă
- câmpul  $H$  este perpendicular pe suprafața de separare a fierului și întrefierului.

Fluxul de dispersie fiind neglijabil (deoarece întrefierul este mic), se poate presupune că intensitatea câmpului în întrefier  $H_m$  este constantă și perpendiculară pe armăturile magnetice, în zona unde ele sunt față în față.

## Întrebarea 1: răspuns

Pentru  $|\theta| < \alpha$ , rezultă:

$$M_{em} = \frac{-\mu_0 R l n^2 i^2 \theta}{4e |\theta|}$$

În figura 2 este reprezentată evoluția acestui cuplu în funcție de poziție, pentru  $nN = 230$  A.spire.



Figura 2: Dependența cuplului în funcție de poziție (în ipoteza permeabilității infinite a fierului)

## Întrebarea 1: demonstrație

În toate punctele din întrefier avem:

$$H_e = \frac{ni}{2e}$$

Se trece de la intensitatea câmpului în întrefier  $\vec{H}_e$ , la inducția în întrefier  $\vec{B}_e$ , cu ajutorul relației  $\vec{B}_e = \mu_0 \vec{H}_e$ .

$\vec{B}_e$  fiind perpendicular pe suprafața întrefierului, fluxul  $\phi$  prin fiecare din cele două porțiuni de întrefier, pentru  $|\theta| < \alpha$  va fi:

$$\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = B_e R_e (\alpha - |\theta|) \ell = \frac{\mu_0 R_e (\alpha - |\theta|) \ell ni}{2e}$$

deoarece deschiderea unghiulară a zonelor în care armăturile sunt față în față este între  $\alpha - \theta$  pentru  $\theta > 0$  și  $\alpha - (-\theta)$  pentru  $\theta < 0$ .

### 2. Ajutor

Pentru a calcula simplu reluctanța circuitului magnetic, se va considera că repartiția câmpului magnetic este uniformă. Această ipoteză nu este valabilă în imediata apropiere a întrefierului, dacă armăturile nu sunt aliniate, deoarece în aceste zone, liniile de câmp au tendința de a se concentra în zonele aflate față în față. Eroarea este cu atât mai mare, cu cât zona în care armăturile sunt față în față, este mai mică.

## Întrebarea 2: răspuns

Pentru  $|\theta| < \alpha$ , rezultă:

$$M_{em} = \frac{-\mu_0 R_e \ell n^2 r^2 e}{\left[2e + \frac{L_f R_e (\alpha - |\theta|)}{\mu_r \ell_f}\right]^2} \frac{|\theta|}{\theta}$$

Se constată că, spre deosebire de cazul când se considera permeabilitatea fierului infinită, cuplul electromagnetic este mai mic, în special în jurul poziției  $\theta=0$ . Reducerea este de mai mult de 25% față de cazul în care permeabilitatea materialului feromagnetic se presupune a fi infinită (figura 4).

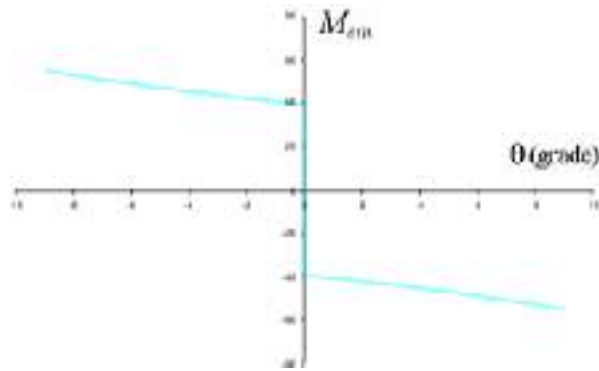


Figura 4: Dependența cuplului de poziție

## Întrebarea 2: demonstrație

Aplicând teorema lui Ampère pe același contur ca și mai înainte, contur ce se presupune că reprezintă traseul mediu al fluxului magnetic în fier, se obține:

$$\oint \vec{H} d\vec{\ell} = 2H_e e + H_f L_f = ni \quad (1)$$

Câmpurile  $H_f$  și  $H_e$ , în fier, respectiv în întrefier, sunt legate de valorile inducțiilor corespunzătoare  $B_f$  și  $B_e$  prin:

$$B_f = \mu_r \mu_0 H_f \quad (2)$$

$$B_e = \mu_0 H_e \quad (3)$$

Ținând cont de conservarea fluxului, pentru  $|\theta| < \alpha$ , se poate scrie:

$$\phi = B_e R_e (\alpha - |\theta|) \ell = B_f \ell_f \ell \quad (4)$$

Combinând ecuațiile (2) și (4), se poate exprima câmpul  $H_f$  în funcție de inducția  $B_e$ :

$$H_f = \frac{B_e R_e (\alpha - |\theta|)}{\mu_r \mu_0 \ell_f} \quad (5)$$

Înlocuind această expresie în (1) și ținând cont de (3), se obține în final:

$$B_e \left[ \frac{2e}{\mu_0} + \frac{L_f R_e (\alpha - |\theta|)}{\mu_r \mu_0 \ell_f} \right] = ni$$

sau:

$$B_e = \frac{\mu_0 ni}{\left( 2e + \frac{L_f R_e (\alpha - |\theta|)}{\mu_r \ell_f} \right)} \quad (6)$$

Dependența inducției  $B_e$  de poziția armăturii mobile este reprezentată în figura 5, pentru  $nN = 230$  A.spire

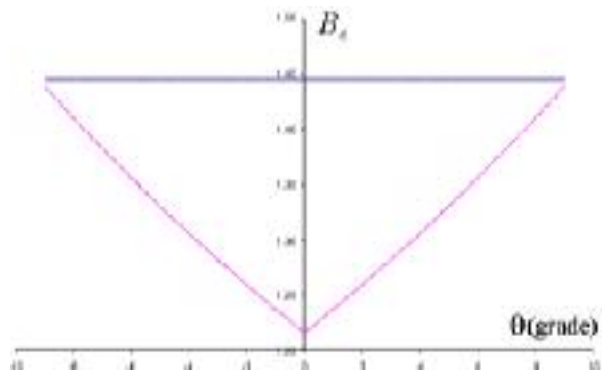


Figura 5: Dependența inducției  $B_e$  în funcție de poziție

Se observă că, spre deosebire de cazul în care se consideră permeabilitatea fierului infinită, valoarea calculată a inducției depinde de lungimea circuitului magnetic, influența fiind mai mare când fețele polare ale celor două armături se află față în față ( $\theta = 0$ ). Acest rezultat se poate interpreta prin faptul că, în această poziție, reluctanța porțiunii circuitului magnetic corespunzătoare întrefierului

$$\mathfrak{R}_e = \frac{e}{\mu_0 S_e} = \frac{e}{\mu_0 R_e (\alpha - |\theta|) e} \quad (7)$$

este minimă. Influența reluctanței miezului magnetic

$$\mathfrak{R}_f = \frac{L_f}{\mu_0 \mu_r S_f} = \frac{L_f}{\mu_0 \mu_r \ell_f e} \quad (8)$$

asupra expresiei fluxului din circuit

$$\phi = \frac{ni}{\mathfrak{R}_e + \mathfrak{R}_f} \quad (9)$$

este deci minimă.

Fluxul total înălțuit de bobină este:

$$\psi = n\phi = \frac{\mu_0 \ell n^2 i}{\frac{2e}{R_e (\alpha - |\theta|)} + \frac{L_f}{\mu_r \ell_f}} \quad (10)$$

inductanța  $L$  putându-se scrie:

$$L = \frac{\psi}{i} = \frac{\mu_0 \ell n^2}{\frac{2e}{R_e (\alpha - |\theta|)} + \frac{L_f}{\mu_r \ell_f}} \quad (11)$$

Cuplul electromagnetic, egal cu derivata în raport cu poziția a co-energiei (egală cu energia) magnetică, exprimată în funcție de curentul  $i$ , este:

$$M_{em} = \frac{\partial W_{cmag}}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{2} L i^2 \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial \theta} i^2$$

Ținând cont de (11), acesta se poate scrie

$$M_{em} = -\frac{1}{2} \frac{\frac{\mu_0 2e \ell n^2 i^2}{R_e (\alpha - |\theta|)^2}}{\left[ \frac{R_e}{R_e (\alpha - |\theta|)} + \frac{L_f}{\mu_r R_f} \right]^2} \frac{|\theta|}{\theta}$$

sau :

$$M_{em} = -\frac{\mu_0 R_e \ell n^2 i^2 e}{\left[ 2e + \frac{L_f R_e (\alpha - |\theta|)}{\mu_r \ell_f} \right]^2} \frac{|\theta|}{\theta}$$



### 3. Ajutor

Deoarece, pentru calculul  $H_f$  este necesară cunoașterea valorii permeabilității relative  $\mu_r$  a materialului, iar valoarea acesteia depinde de  $H_f$ , calculul este iterativ.

Pentru  $\theta$  apropiat de zero, inducția  $B_m$  în întrefier este minimă (conform [demonstrației răspunsului la întrebarea 2](#)) și deci, și câmpul  $H_m$ .

Pentru solenație constantă în bobine, câmpul  $H_f$  este deci minim, deoarece, conform teoremei lui Ampère, există relația:

$$2H_m e + H_f L_f = nI$$

Poziția de aliniere a celor două armături corespunde deci, punctului în care saturația materialul miezului este maximă.

Rezultă:

$$H_f = 8651 \text{ A/m pentru } B_f = 0,519 \text{ T}$$

Aceasta corespunde unei permeabilități a miezului:

$$\mu_{r,min} = \frac{B_f}{\mu_0 H_f} = 477,5$$

## Întrebarea 3: demonstrație

Valoarea câmpului din întrefier  $H_f$  este dată ([demonstrația răspunsului la întrebarea 2](#)) de

$$H_f = \frac{B_e R_e (\alpha - |\theta|)}{\mu_r \mu_0 \ell_f}$$

Considerând  $\mu_r = 2000$ , rezultă  $H_f = 311 \text{ A/m}$ .

Conform curbei de magnetizare a materialului, rezultă  $B_f = 0,417 \text{ T}$ . Aceasta corespunde unei permeabilități relative a materialului:

$$\mu_r = \frac{B_f}{\mu_0 H_f} = 1068$$

Considerând această valoare a permeabilității relative ( $\mu_r = 1068$ ), se calculează  $H_f = 511 \text{ A/m}$ , careia îi corespunde valoarea inducției  $B_f = 417 \text{ T}$  și deci  $\mu_r = 720,3$ .

Prin iterații succesive, se găsește punctul de convergență pentru:

$$H_f = 865 \text{ A/m } B_f = 0,519 \text{ T și } \mu_{r,min} = 477,5$$

Indiferent de poziția  $\theta$  a armăturii mobile când  $|\theta| < \alpha$ , cuplul electromagnetic este cuprins între valoarea maximă

$$M_{em,max} = \frac{-\mu_0 R_e \ell n^2 i^2 e}{\left[ 2e + \frac{L_f R_e (\alpha - |\theta|)}{\mu_r \ell_f} \right]}$$

calculată anterior pentru  $\mu_r = 2000$  și valoarea minimă

$$M_{em,min} = \frac{-\mu_0 R_e t n^2 i^2 e}{\left[ 2e + \frac{L_f R_e (\alpha - |\theta|)}{\mu_{r,min} l_f} \right]}$$

Curbele corespunzătoare sunt trasate în figura 7.

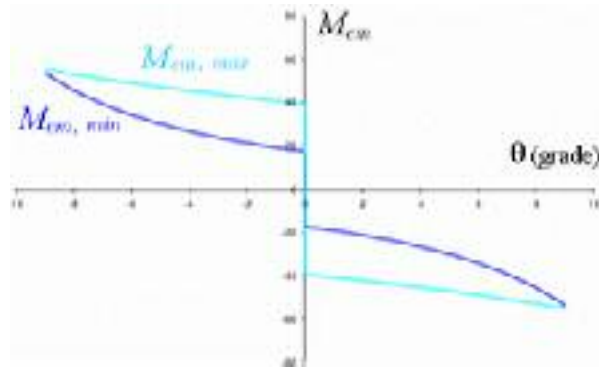


Figura 7: Valorile maxime și minime ale cuplului în funcție de poziție (în ipoteza saturării materialului magnetic)

Se observă că, în jurul poziției  $\theta = 0$ , cuplul dezvoltat de motor scade la  $17 \text{ mN}\cdot\text{m}$ . Efectul de saturație determină deci, reducerea cu peste 50% a cuplului electromagnetic (față de cazul linear, nesaturat).

Calculându-se, pentru fiecare poziție, valoarea permeabilității relative a mediului magnetic, se poate trasa curba  $M_{em}(\theta)$  (figura 8).

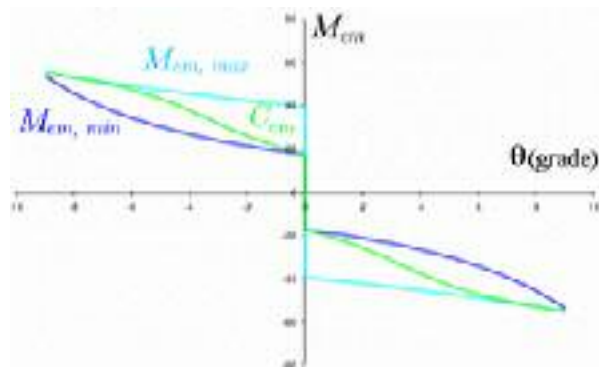


Figura 8: Cuplul în funcție de poziție (în ipoteza saturării materialului magnetic)

Calculul consideră neglijabile

- fluxul de dispersie
- efectele locale ale saturației.

Tehnica de modelare prin elemente finite, permite integrarea numerică a ecuațiilor locale de câmp magnetic (ecuațiile lui Maxwell), în orice punct din spațiu, ceea ce permite evaluarea cuplului în funcție de poziție, cu o precizie mult mai mare.

Figura 10 (obținută cu ajutorul programului FLUX2D dezvoltat de firma [Cedrat](#)), evidențiază că, atunci

când cele două armături sunt aliniate, inducția în zonele din apropierea întrefierului poate atinge local, peste 0,7T (figura 9).

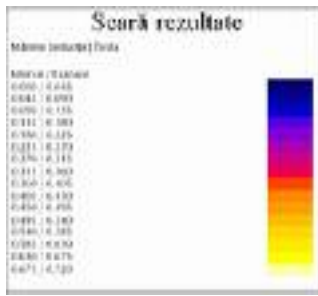


Figura 9: Imagine a inducției  $B$  (scară rezultate)

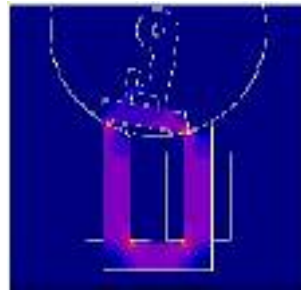


Figura 10: Imagine a inducției  $B$  (calcul cu elemente finite).

[Lansați animația](#) (format avi - 4 198 Ko)

[Transferați filmul](#) (format avi arhivat - 425 Ko)

[Lansați animația](#) (format mpg - 3 042 Ko)

[Transferați filmul](#) (format mpg arhivat - 1 227 Ko)

În acest caz, materialul magnetic este complet saturat. Pentru a atinge acest nivel al inducției, câmpul  $H_f$  trebuie să depășească local valoarea de 100.000 A/m.

Permeabilitatea relativă a mediului magnetic nu va depăși în aceste zone valoarea  $\mu_r = 6$ . Aceste efecte ale saturației locale, explică în mare parte, de ce cuplul calculat prin intermediul tehnicii elementelor finite, este și mai mic decât cel obținut prin calcul analitic (figura 11).

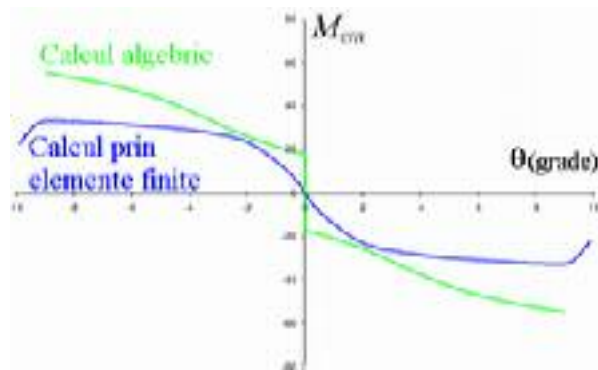


Figura 11: Cuplul în funcție de poziție (calcul cu elemente finite)

În continuare, fenomenul de saturație contribuie la creșterea fluxului de dispersie, respectiv a fluxului magnetic produs de bobine, care nu se închide prin armătura mobilă (figura 12, obținută cu programul FLUX2D dezvoltat de firma Cedrat).

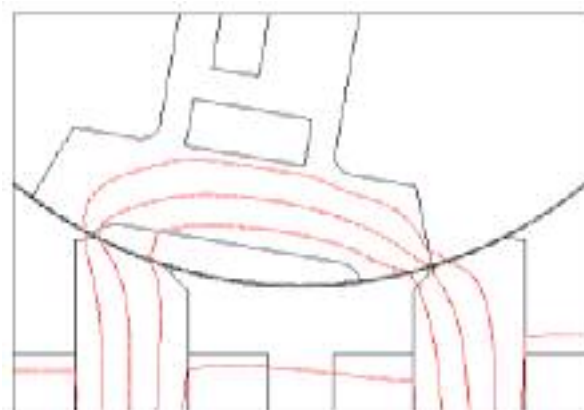


Figura 12: Imagine a fluxului (calcul cu elemente finite).

[Lansați animația](#) (format avi - 8 290 Ko)

[Transferați filmul](#) (format avi arhivat - 742 Ko)

[Lansați animația](#) (format mpg - 6 019 Ko)

[Transferați filmul](#) (format mpg arhivat - 4 547 Ko)

