e-LEE
e-Learning tools for Electrical Engineering

Analiza armonică a tensiunilor de ieşire

Tematica: *Electronică de putere*
→ ***Capitol:*** *Invertoare*
→ ***Secțiunea:*** *Comanda cu modulație în durată*

***Tip resursă*:** ☐ *Expunere* ☒ *Laborator virtual / Exercițiu* ☐ *CVR*

În cadrul acestui laborator, se va realiza analiza armonică a tensiunilor furnizate de un invertor cu MD.

- cunoştințe anterioare necesare: principiul de comandă cu MD
- nivel: ciclul 3 - chestiuni avansate
- durata estimată: 2 h.
- autor: Francis Labrique
- realizare: Sophie Labrique
- traducere: Sergiu Ivanov

Education et culture

Resursă realizată cu sprijin financiar din partea Comunității Europene. Documentul de față nu angajează decât responsabilitatea autorului(rilor) lui. Comisia îşi declină orice responsabilitate ce ar putea decurge din utilizarea lui.

Enunțul lucrării de laborator

Pentru analiza conținutului de armonici al tensiunilor de ieşire, se poate pleca de la analiza armonică a potențialelor mediane ale fiecărui braț al invertorului V_j.

Pseudo dezvoltare în serie Fourier a potențialului median P_j al unui braț

Se va considera cazul când potențialul V_j este determinat în urma comparației dintre valoarea prescrisă V_{jw} şi tensiunea de referință (purtătoarea) cu formă de undă triunghiulară ξ.

Se presupune că tensiunea de referință are amplitudinea unitară (=1) şi perioada *T*.

Pentru V_j rezultă (figura 1)

$$V_j = \frac{U}{2} \text{ când } V_{jw} > \xi$$
$$V_j = -\frac{U}{2} \text{ când } V_{jw} < \xi$$

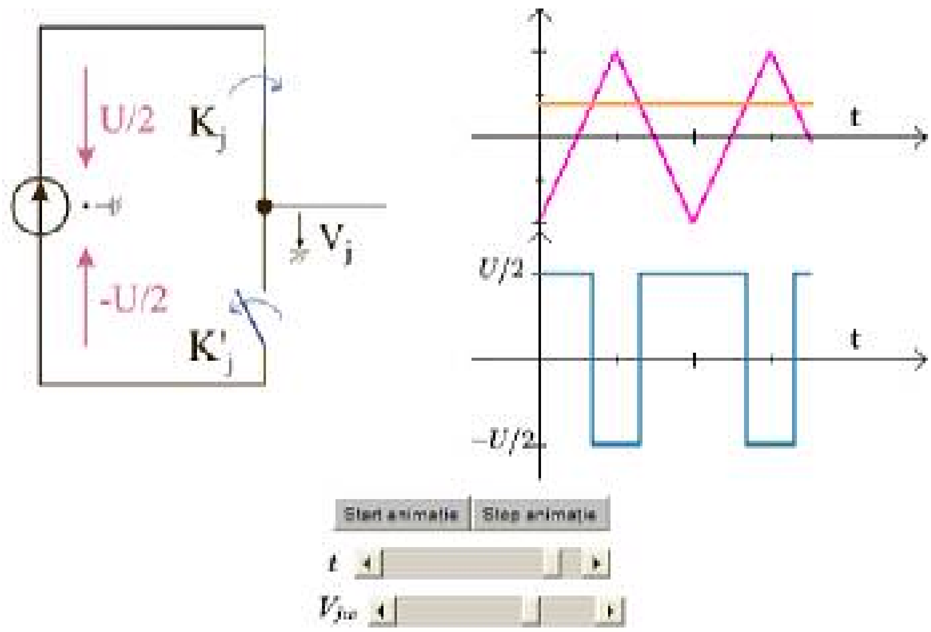

Figura 1

- ***Dacă V_{jw} ar fi constant (figura 2), potențialul V_j ar fi o funcție periodică de perioadă T. Care este dezvoltarea în serie Fourier a acestuia?***

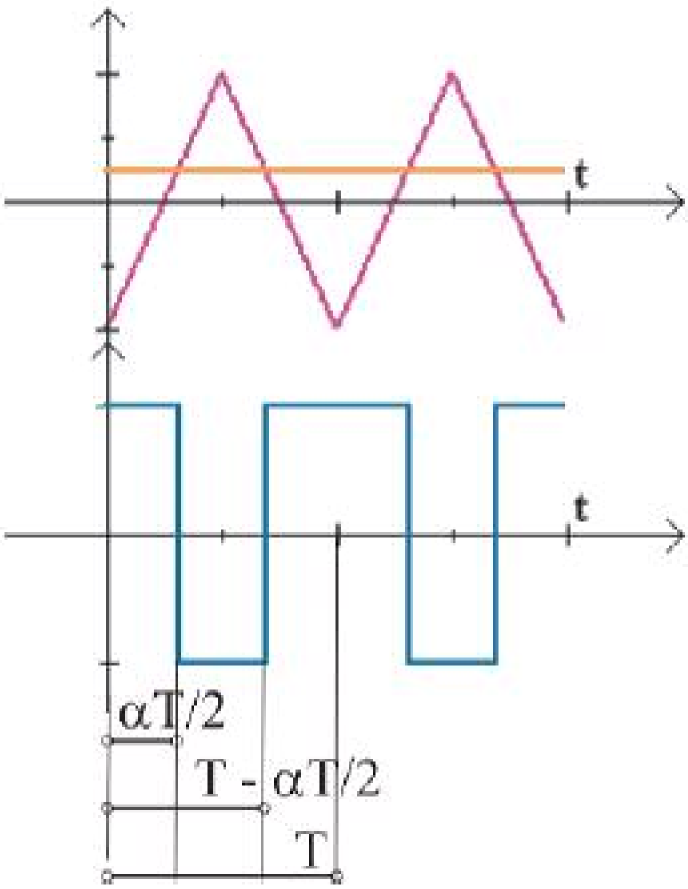

Figura 2

Răspuns >>

Dezvoltarea în serie Fourier a potențialului V_j este:

$$V_j = \frac{U}{2} V_{jw} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2U}{i\pi} \sin[i(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} V_{jw})] \cos(i\,\omega_p\, t)$$

respectiv:

$$\begin{aligned} V_j &= \frac{U}{2} V_{jw} + \sum_{i=1}^{\xi} (-1)^{j-1} \frac{2U}{(2j-1)\pi} \cos[(2j-1)\frac{\pi}{2} V_{jw}] \cos[(2j-1)\omega_p t] \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2U}{(2k\pi)} \sin[2k\frac{\pi}{2} V_{jw}] \cos[2k\omega_p t] \end{aligned}$$

cu $\omega_p = \frac{2\pi}{T}$, pulsația tensiuni de referință(purtătoare).

Demonstrarea răspunsului >>

Valoarea media a lui V_j este (figura 3)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V_j d\omega_p t &= \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\alpha\pi}\frac{U}{2}d\omega_p t + \int_{\alpha\pi}^{2\pi-\alpha\pi} -\frac{U}{2}d\omega_p t + \int_{2\pi-\alpha\pi}^{2\pi}\frac{U}{2}d\omega_p t\right]\\ &= (2\alpha-1)\frac{U}{2}\end{aligned}$$

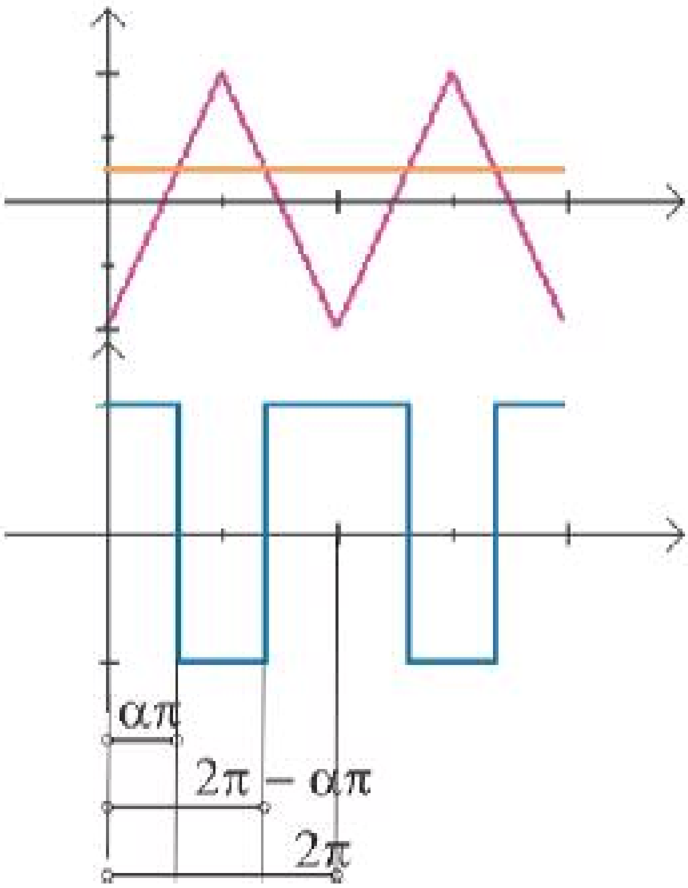

Figura 3

Între α şi V_{jw} există relaţia:

$$\alpha\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \quad V_{jw}$$

respectiv

$$2\alpha - 1 = V_{jw}$$

De unde, rezultă

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V_j d\omega_p t = \frac{U}{2} V_{jw}$$

Dezvoltarea în serie a potenţialului V_j nu conţine decât termeni în cosinus, datorită simetriei formei de undă faţă de $\omega_p \frac{T}{2} = \pi$.

Prima armonică a lui V_j(în funcție de $\cos\omega_p t$) are amplitudinea (figura 4).

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} V_j \cos\omega_p t d\omega_p t$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\alpha\pi} \frac{U}{2}\cos\omega_p t\, d\omega_p t + \int_{\alpha\pi}^{2\pi-\alpha\pi} -\frac{U}{2}\cos\omega_p t\, d\omega_p t + \int_{2\pi-\alpha\pi}^{2\pi} \frac{U}{2}\cos\omega_p t\, d\omega_p t\right]$$

respectiv

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} V_j \cos\omega_p t d\omega_p t = \frac{2U}{\pi}\sin(\alpha\pi)$$

Cum

$$\alpha\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}V_{jw}$$

rezultă în final

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} V_j \cos\omega_p t\, d\omega_p t = \frac{2U}{\pi}\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}V_{jw}) = \frac{2U}{\pi}\cos(\frac{\pi}{2}V_{jw})$$

A doua armonică a lui V_j(în funcție de $\cos 2\omega_p t$) are amplitudinea

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} V_j \cos 2\omega_p t\, d\omega_p t$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\alpha\pi} \frac{U}{2}\cos 2\omega_p t\, d\omega_p t + \int_{\alpha\pi}^{2\pi-\alpha\pi} -\frac{U}{2}\cos 2\omega_p t\, d\omega_p t + \int_{2\pi-\alpha\pi}^{2\pi} \frac{U}{2}\cos 2\omega_p t\, d\omega_p t\right]$$

respectiv

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} V_j \cos 2\omega_p t d\omega_p t = \frac{2U}{2\pi}\sin 2\alpha\pi$$

Cum

$$\alpha\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}V_{jw}$$

rezultă în final

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} V_j \cos 2\omega_p t\, d\omega_p t = \frac{2U}{2\pi}\sin(2\frac{\pi}{2} + 2\frac{\pi}{2}V_{jw}) = -\frac{U}{\pi}\sin(\pi V_{jw})$$

şi aşa mai departe.

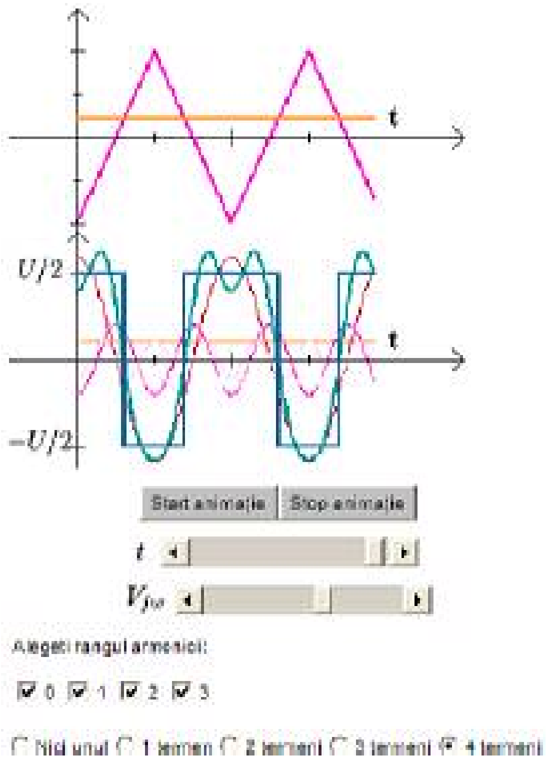

Figura 4

Dacă V_{jw} variază în timp, V_j nu mai este o funcție periodică de perioadă *T*, deoarece lățimea pulsurilor se modifică de la o perioadă la alta.

Dar dacă V_{jw} variază lent față de perioada de modulare *T*, lățimea pulsurilor se modifică puțin de la o perioadă la alta: în jurul unui anumit moment *t*, se poate reconstitui suficient de precis $V_j(t)$, prin considerarea dezvoltării în serie Fourier pe care am fi obținut-o dacă V_{jw} ar fi fost constant, de valoare $V_{jw}(t)$.

- ***Cum se modifică în aceste condiții dezvoltarea în serie Fourier, dacă*** $V_{jw} = r\sin(\omega t + \theta_0)$***?***

Răspuns >>

$$V_j(t) \simeq \frac{U}{2}V_{jw}(t) + \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}\frac{2U}{(2j-1)\pi}\cos\left[(2j-1)\frac{\pi}{2}V_{jw}(t)\right]\cos[(2j-1)\omega_p t]$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2U}{2k\pi}\sin\left[2k\frac{\pi}{2}V_{Aw}\right]\cos(2k\omega_p t)$$

Dacă

$$V_{jw}(t) = r\sin(\omega t + \theta_0) \qquad \text{cu} \qquad \omega << \omega_p$$

rezultă:

$$V_j(t) \simeq r\frac{U}{2}\sin\omega t + \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}\frac{2U}{(2j-1)\pi}\cos\left[(2j-1)\frac{\pi}{2}r\sin(\omega t+\theta_0)\right]\cos[(2j-1)\omega_p t]$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2U}{2k\pi}\sin\left[2k\frac{\pi}{2}r\sin(\omega t+\theta_0)\right]\cos(2k\omega_p t)$$

Se observă că psudo dezvoltarea în serie Fourier reconstituie bine forma de undă a potențialului V_j.

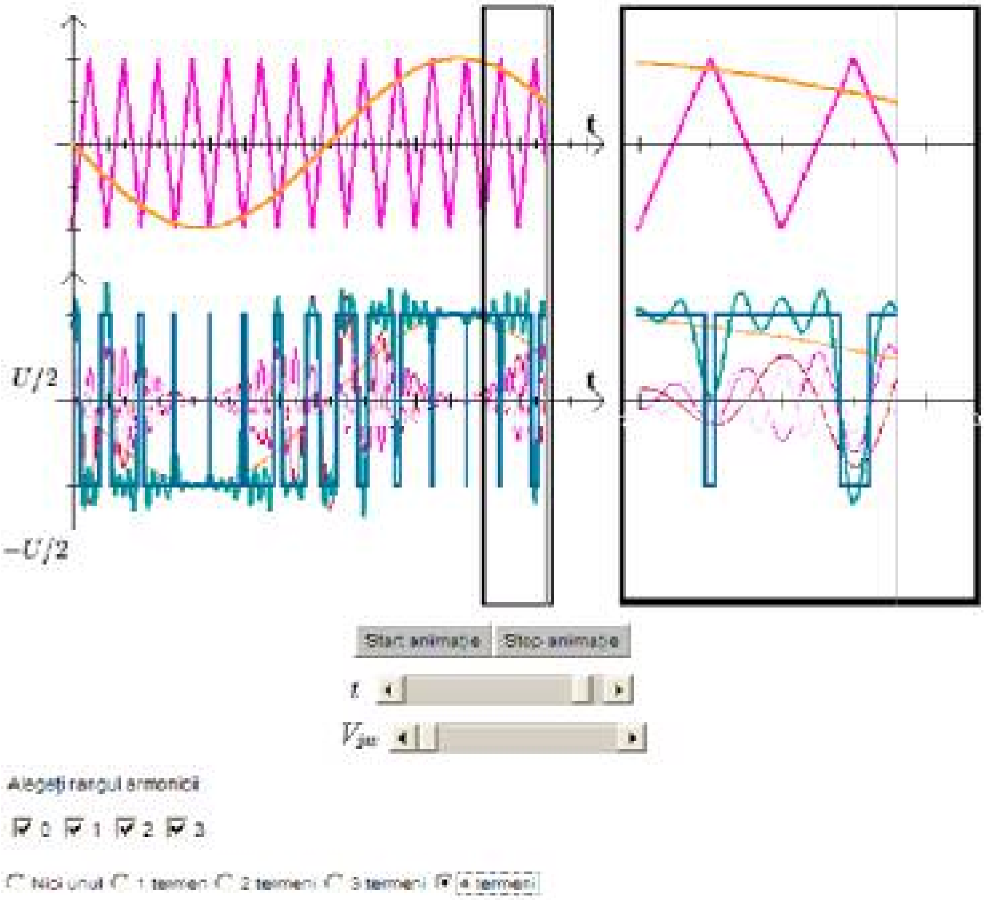

Figura 5

Analiza pseudo dezvoltării în serie Fourier

Pseudo dezvoltare în serie a potențialului V_j este

$$V_j(t) \simeq \frac{U}{2}V_{j\omega}(t) + \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}\frac{2U}{(2j-1)\pi}\cos\left[(2j-1)\frac{\pi}{2}V_{j\omega}(t)\right]\cos[(2j-1)\omega_p t]$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2U}{2k\pi}\sin\left[2k\frac{\pi}{2}V_{1\omega}\right]\cos(2k\omega_p t)$$

Fiecare componentă a acestei dezvoltări are o "amplitudine" care se modifică în timp.

De asemenea, dacă $V_j = r\sin(\omega t+\theta_0)$, rezultă:

$$V_j(t) \simeq r\frac{U}{2}\sin\omega t + \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}\frac{2U}{(2j-1)\pi}\cos\left[(2j-1)\frac{\pi}{2}r\sin(\omega t+\theta_0)\right]\cos[(2j-1)\omega_p t]$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2U}{2k\pi}\sin\left[2k\frac{\pi}{2}r\sin(\omega t+\theta_0)\right]\cos(2k\omega_p t)$$

• "Valoarea medie" a potențialului V_1 are amplitudinea

$$r\frac{U}{2}\sin(\omega t+\theta_0)$$

Ea urmăreşte valoarea prescrisă.

Aceasta confirmă afirmația că, în cazul modulației în durată, potențialul V_1 urmăreşte, ca valoare medie, valoarea sa prescrisă $V_{1\omega}$.

• Termenul de pulsație $\omega_p t$ corespunzător frecvenței tensiunii de referință (purtătoare) se poate scrie:

$$\frac{2U}{\pi}\cos[\frac{\pi}{2}r\sin(\omega t+\theta_0)]\cos\omega_p t$$

- ***Arătați că, datorită variației în timp a "amplitudinii", în locul unei linii armonice de pulsație ω_p, există o familie de linii armonice de pulsații ω_p, $\omega_p \pm 2\omega$, $\omega_p \pm 4\omega$, ...***

Ajutor

Pentru a demonstra aceasta, este suficient să înlocuim amplitudinea $\cos[\frac{\pi}{2}r\sin(\omega t+\theta_0)]$ cu dezvoltarea sa în serie Taylor

$$\cos[\frac{\pi}{2}r\sin(\omega t+\theta_0)] = 1 - \frac{1}{2!}[\frac{\pi}{2}r\sin(\omega t+\theta_0)]^2 + \frac{1}{4!}[\frac{\pi}{2}r\sin(\omega t+\theta_0)]^4 \dots$$

apoi să exprimăm $\sin^2(\omega t+\theta_0)$, $\sin^4(\omega t+\theta_0)$, ... în funcție de $\cos 2\omega t$, $\cos 4\omega t$, ...

$$\sin^2(\omega t+\theta_0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2(\omega t+\theta_0)$$
$$\sin^4(\omega t+\theta_0) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2(\omega t+\theta_0) + \frac{1}{8}\cos 4(\omega t+\theta_0)$$

Răspuns >>

$$\begin{aligned}
&\frac{2U}{\pi}\cos[\frac{\pi}{2}r\sin(\omega t+\theta_0)]\cos\omega_p t\\
&=\frac{2U}{\pi}\left\{1-\frac{1}{2!}[\frac{\pi}{2}r\sin(\omega t+\theta_0)]^2+\frac{1}{4!}[\frac{\pi}{2}r\sin(\omega t+\theta_0)]^4...\right\}\cos\omega_p t\\
&=\frac{2U}{\pi}\left\{1-\frac{1}{2!}\frac{\pi^2r^2}{4}[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2(\omega t+\theta_0)]+\frac{\pi^4r^4}{4!16}[\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2(\omega t+\theta_0)+\right.\\
&\qquad\left.\frac{1}{8}\cos 4(\omega t+\theta_0)]+...\right\}\cos\omega_p t
\end{aligned}$$

Grupând termenii după $\cos\omega_p t$, $\cos 2\omega t$, $\cos 4\omega t$, ... rezultă:

$$\begin{aligned}
\frac{2U}{\pi}\cos[\frac{\pi}{2}r\sin(\omega t+\theta_0)]\cos\omega_p t &= \frac{2U}{\pi}\left[1-\frac{1}{2!}\frac{\pi^2r^2}{8}+\frac{1}{4!}\frac{\pi^4r^4}{16}...\right]\cos\omega_p t\\
&+\frac{2U}{\pi}\left[\frac{1}{2!}\frac{\pi^2r^2}{8}-\frac{1}{4}\frac{\pi^4r^4}{32}....\right]\cos 2(\omega t+\theta_0)\cos\omega_p t\\
&+\frac{2U}{\pi}\left[\frac{1}{4!}\frac{\pi^4r^4}{128}....\right]\cos 4(\omega t+\theta_0)\cos\omega_p t...
\end{aligned}$$

Cum $\cos a\cos b=\frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$, se obține în final:

$$\begin{aligned}
&\frac{2U}{\pi}\cos[\frac{\pi}{2}r\sin(\omega t+\theta_0)]\cos\omega_p t\\
=&\frac{2U}{\pi}\left[1-\frac{1}{2!}\frac{\pi^2r^2}{8}+\frac{1}{4!}\frac{\pi^4r^4}{16}...\right]\cos\omega_p t\\
+&\frac{2U}{\pi}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2!}\frac{\pi^2r^2}{8}-\frac{1}{4!}\frac{\pi^4r^4}{32}...\right][\cos[(\omega_p-2\omega-2\theta_0)t]+\cos[(\omega_p-2\omega+2\theta_0)t]]\\
+&\frac{2U}{\pi}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4!}\frac{\pi^4r^4}{128}+...\right][\cos[(\omega_p-4\omega-4\theta_0)t]+\cos[(\omega_p-4\omega+4\theta_0)t]]\\
+&...
\end{aligned}$$

Termenul de pulsație ω_p și amplitudine $\cos[\frac{\pi}{2}r\sin(\omega t+\theta_0)]$ este deci echivalentul ansamblului de armonici:

- una de pulsație ω_p
- două, de pulsații $\omega_p-2\omega$ și $\omega_p+2\omega$ cu amplitudini egale
- două, de pulsații $\omega_p-4\omega$ și $\omega_p+4\omega$ cu amplitudini egale
- ...

Amplitudinile armonicilor descresc rapid pe măsură ce pulsația se depărtează de ω_p.

• Printr-un calcul similar , se poate arăta că termenul de pulsație $2\omega_p$ al pseudo dezvoltării în serie Fourier

$$-\frac{2U}{2\pi}\sin[\pi r\sin(\omega t+\theta_0)]\cos(2\omega_p t)$$

va da:

- două armonici de pulsații $2\omega_p - \omega$ și $2\omega_p + \omega$ cu amplitudini egale
- două armonici de pulsații $2\omega_p - 3\omega$ și $2\omega_p + 3\omega$ cu amplitudini egale
- ...

Armonicile se grupează în familii situate în jurul pulsațiilor ω_p, $2\omega_p$, $3\omega_p$, ...